

Title	不変トーラスとしてのソリトン(高次元系II,カオスとその周辺,研究会報告)
Author(s)	野崎, 一洋
Citation	物性研究 (1986), 46(2): 280-281
Issue Date	1986-05-20
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/91984">http://hdl.handle.net/2433/91984</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 不変トーラスとしてのソリトン

名大・理 野 崎 一 洋

## § 1. はじめに

ソリトンは無限自由度の完全可積分な非線形波動系における分離可能な有限自由度に対応しているが、実際の物理系では摂動（例えば、高次項）のため可積分性は破れている。ところが、ソリトンがしばしば観測されている事実は、摂動に対するソリトンの安定性を示唆している。このような可積分性が破れている状況で存在するソリトンは不規則な振子舞い（ソリトンのカオス）をすることが予想される。実際、散逸性の摂動に対して、ソリトンが、カオス的なアトラクターとなる場合があることが示されている<sup>1)</sup>。ここでは、保存性の摂動に対しても、ソリトンのもつ有限次元性が近似的に保持されることを、非線形シュレーディンガー系について示す。

## § 2. 有限次元トーラスとしてのソリトン

多くの完全可積分なソリトン方程式が知られているが、ここでは、有限の位相空間内で記述し得る、非線形シュレーディンガー方程式の空間的に対称なソリトンを考える。摂動としては、次のような高次の非線形項と外力を加える。

$$i q_t + q_{xx} + 2 |q|^2 q = -2 \varepsilon_n |q|^4 q - i \varepsilon_0, \quad (1)$$

ここで、 $q$  は複素場、 $\varepsilon_n$ 、 $\varepsilon_0$  は小さな実摂動パラメータ。非摂動系の空間対称な  $n$ ・ソリトンは、ソリトン以外の場（輻射）と完全に分離でき、ソリトンの位相空間内では  $n$ ・トーラスとなり、作用・角変数  $(I_1, I_2, \dots, I_n; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  で記述される。ここで  $I_1, \dots, I_n$  はソリトンの振幅を決める定数で、 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  はソリトンの振動位相である。この  $n$ ・ソリトンは、 $n$  個のソリトンの「束縛状態」のように見える。このようなソリトンに(1)で与えられた摂動が加わった時、ソリトンは壊れないか、また、壊れる場合には、そのカオス的振る舞いに興味を持たれる。1次の摂動論の枠内では、ソリトンは非摂動系と同様に有限次元性を保持することが示せるので、有限次元ハミルトン系において良く知られた結果が適用され得る。しかし、高次の摂動効果を考えると、ソリトン-ソリトンの非弾性的相互作用により、輻射が放出され、系の自由度は大幅に増え、ソリトンのみで閉じた有限系で得られる結果が有効である保証はない。そこで、(1)の数値実験により、たとえ、小さな輻射が共存しても、有限次元系として得られた結果が有効であることを次節で述べる。

## § 3. 数値実験

数値実験は、(A)  $\varepsilon_n \asymp 0$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ , (B)  $\varepsilon_n = 0$ ,  $\varepsilon_0 \asymp 0$ , の場合について、2・と3・ソリトンについて行った。(A)では、ハミルトニアン(と運動量)以外に「質量」が保存するが、(B)では、前者以外に保存量はない、この違いは、少数のソリトン系で顕著に現われる。1次の摂動論の枠内では、2・ソリトンは(A)の場合、振動数比が有理数でも非共鳴で可積分であるが、(B)では、非可積分で振動数比がある特定の有理数の場合、2・トーラスは共鳴トーラスとなることがわかる。これらの予想は、数値実験において、ソリトン部分に着目することにより確かめられた。しかし、摂動を大きくしてゆくと、2・ソリトンのみの2自由度系で予想される、共鳴トーラスの重なりによる大域的カオスが起る前に、輻射の放出が激しくなり、ついには、1・ソリトンのようになることがわかった。共鳴トーラスの重なりによる大域的カオスによると思われる現象としては、3・ソリトン系で、(B)の場合、「束縛状態」から、3個の1・ソリトンへの解離現象が観測された。

## § 4. おわりに

非線形シュレーディンガー方程式のソリトンの「束縛状態」は、十分小さな摂動に対して、1次の摂動論から予想される有限次元不変トーラスとしての性質を小さな輻射が共存するにもかかわらず近似的に保持することがわかった(少なくとも3・ソリトンまでは)。共鳴トーラスの場合でも、有限次元的な特性は保持されている。これらの結果は、無限次元非可積分系における有限次元不変トーラスの存在を示唆する。無限次元系のKAM理論(もし存在すれば)との関係は明らかではないが、仮に、無限次元のKAMトーラスが存在しても、そのこと自身からは、ソリトンの有限次元性は、導けないと思われる。なぜなら、無限次元のトーラス上を系が運動することにより、ソリトンから輻射へとエネルギーが移行してしまい、ソリトンは、ほとんど見えなくなる可能性があるからである。

## 参 考 文 献

- 1) 野崎一洋, 戸次直明, 月刊フィジクス, 6 (1985), 534.